MODIFIKASI METODE JARRAT DENGAN VARIAN METODE NEWTON DAN RATA-RATA KONTRA HARMONIK

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

Oleh :

KHARISMA JAKA ARFALD
10754000340

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2012

MODIFIKASI METODE JARRAT DENGAN MENGGUNAKAN VARIAN NEWTON DAN KONTRA HARMONIK

KHARISMA JAKA ARFALD
10754000340

Tanggal Sidang : 2012
Tanggal Wisuda : 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Metode Jarrat adalah salah satu metode yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinier dengan orde konvergensi ke-empat. Oleh karena kecepatan sebuah metode bergantung kepada orde konvergensinya dalam meminimalkan jumlah iterasi, maka pada skripsi ini penulis memodifikasi metode Jarrat dengan menggunakan varian newton dan kontra harmonik guna meningkat orde konvergensi. Berdasarkan hasil penelitian, modifikasi metode Jarrat termodifikasi menghasilkan orde konvergensi ke-enam. Selain itu, berdasarkan hasil simulasi dan perhitungan orde konvergensi secara numerik (COC), secara umum modifikasi Jarrat memiliki iterasi yang lebih sedikit dan memiliki nilai COC lebih tinggi dibandingkan nilai iterasi dan COC metode lain yang memiliki orde konvergensi lebih rendah secara teoris.

Kata kunci: COC (Computational Order of Convergence), Kontra Harmonik, Metode Jarrat, Orde Konvergensi.

KATA PENGANTAR

Syukur *Alhamdulillah* penulis panjatkan kehadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini tepat pada waktunya. Shalawat beriring salam penulis ucapkan kepadqa junjungan alam Nabi Muhammad SAW. yang telah mengantarkan kita kepada keimaanan yang hakiki. Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan tingkat sarjana.

Dalam penulisan, penyusunan dan penyelesaian Tugas Akhir ini, penulis telah banyak menerima petunjuk, bimbingan dan nasehat dari berbagai pihak. Untuk itu sudah sepantasnya bila penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. H. M. Nasir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Wartono, M.Sc. selaku pembimbing yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dalam penulisan Tugas Akhir ini.
5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku koordinator Tagas Akhir
6. Orang tuaku tercinta yang telah melimpahkan perhatian dan kasih sayang juga materi yang tak mungkin bisa terbalas.
7. Adik-adikku, Reki dan diko.
8. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan FST UIN SUSKA Riau, khususnya di Jurusan Matematika.
9. Teman-teman Matematika Angkatan 2007 serta para senior dan junior.
10. Syarifah aini, Vina Pramita, Priorita Wijaya, Sitty Fauziah atas semangat yang tiada hentinya.
11. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal sampai selesai Tugas Akhir ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Dalam penyusunan Tugas Akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan Tugas Akhir ini.

Pekanbaru,   Mei 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan nonlinier adalah suatu bentuk persamaan yang sulit untuk ditentukan akar-akar persamaanya. Metode iterasi merupakan teknik yang digunakan untuk menentukan akar-akar penekatan suatu persamaan nonlinier. Metode Newton dengan orde konvergensi dua adalah metode yang paling sering digunakan untuk menyelesaikan akar-akar persamaan tersebut.

Oleh karena kecepatan sebuah metode bergantung kepada orde konvergensinya untuk meminimalkan jumlah iterasi, maka dikembangkan beberapa metode iterasi untuk menghasilkan orde konvrgensi yang lebih tinggi. Salah satunya adalah metode Jarrat yang memiliki orde konvergensi tingkat empat

$$J_n = x_n - jf(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.1}$$

dengan

$$Jf(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)},$$

dan

$$y_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)}.$$

Dalam perkembangannya telah banyak metode yang dimodifikasi sehingga menghasilkan tingkat orde konvergensi yang tinggi. Hal ini dimaksudkan untuk menghasilkan suatu nilai yang dapat menghampiri nilai eksak dengan eror yang kecil. Salah satu bentuk modifikasi adalah Jurnal dari Weerakon dan Fernando (1998) telah dikembangkan lagi oleh Manoj Kumar Singh (2009) dengan modifikasi metode Newton dan aturan Trapesium dengan rata-rata kontra harmonik yang menghasilkan konvergensi tingkat enam. Contoh lainya adalah Metode Jarratt's dengan orde konvergensi ke empat yang diinterpolasikan kembali oleh Changbum Chun (2007), menghasilkan konvergensi ke enam.

Oleh karena itu, pada skripsi ini penulis akan mencoba menguraikan modifikasi metode jarrat dengan menggunakan metode newton dan rata rata kontra harmonik untuk menghasilkan tingkat orde konvergensi yang tinggi.

1.2 Rumusan Masalah

Perumusan masalah pada tugas akhir ini adalah menentukan bentuk modifikasi persamaan (1.1) dengan metode newton dan rata-rata kontra harmonik dan mencari tingkat orde konvergensinya.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini adalah

a. Fungsi variabel tunggal dan bernilai real
b. Ruang Euclid

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah

a. Menentukan bentuk modifikasi persamaan (1.1) dengan Varian Metode Newton orde enam dan rata-rata kontra harmonik.
b. Menentukan orde konvergensi dari Varian Metode Jarrat
c. Simulasi numerik Varians Metode Jarrat.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Dapat ditentukan bentuk baru varian metode jarrat dengan modifikasi persamaan (1.1) dengan metode newton dan rata-rata kontra harmonik.
2. Dapat digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan non-linear dengan iterasi yang lebih sedikit.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini mencakup lima bab yaitu :

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisi tentang teori-teori dasar yang digunakan dalam penelitian.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisi tentang metodologi penelitian yang digunakan dalam skripsi ini.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisi tentang pembahasan bagaimana bentuk rumusan baru dari persamaan (1.1) dengan menggunakan metode newton dan rata-rata kontra harmonik, serta bagaimana bentuk orde konvergensinya.

BAB V Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Orde Hampiran

Dalam kenyataannya banyak terdapat fungsi yang rumit sehingga sulit untuk dicari penyelesainya, tetapi fungsi tersebut dapat diganti dengan fungsi yang lebih sederhana. Misalnya $f(h)$ yang dihampiri oleh fungsi $p(h)$, dan selisih antara fungsi tersebut disebut *error* yang terjadi dalam aproksimasi oleh fungsi $p(h)$ sebagai $O(h^n)$.

Definisi 2.1. **Orde Hampiran** (Mathews, John. H, 1992) Misalkan nilai fungsi $f(h)$ diaproksimasi oleh suatu fungsi $p(h)$. Jika terdapat sebuah bilangan konstanta rill $K>0$ dan sebuah bilangan bulat positif n sedemikian hingga

$$\frac{|f(h) - p(h)|}{|h^n|} \leq K \tag{2.1}$$

untuk h yang sangat kecil, maka dapat dikatakan bahwa $f(h)$ diaprokmasi oleh $p(h)$ dengan orde aproksimasi $O(h^n)$ dan dapat ditulis

$$f(h) = p(h) + O(h^n) \tag{2.2}$$

Jika persamaan (2.2) ditulis dalam bentuk $|f(h) - p(h)| \leq K|h^n|$, maka $O(h^n)$ terletak di posisi $K|h^n|$. untuk itu sebaiknya gunakan Polinomial Taylor sebagai $p(h)$ untuk mengaproksimasi fungsi $f(h)$ pada orde n. Selisih yang diperoleh dari aproksimasi Polinomial Taylor dapat ditulis dalam bentuk $O(h^{n+1})$ Jika bentuk selisih ini konvergen ke nol dan h^{n+1} konvergen ke nol, maka dapat dirumuskan dengan

$$O(h^{n+1}) \approx Kh^{n+1} \approx \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)} h^{n+1}$$

dengan h yang cukup kecil.

2.2 Orde Konvergensi

Orde konvergensi adalah suatu tingkat percepatan dalam penyelesaian persamaan nonlinear $f(x) = 0$**.** Definisi orde konvergensi adalah sebagai berikut:

Definisi 2.2 Orde Konvergensi (Mathews, John. H, 1992). Asumsikan bahwa $\{x_0\}_{n=0}^{\infty}$ konvergen ke α dan diberikan $e_n = x_n - \alpha$ untuk $n \geq 0$. Terdapat $K \neq 0$ dan $p > 0$ sehingga

$$\lim_{n-\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \lim_{n-\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = K$$

Jika $p = 2$ maka metode hampiran memiliki orde konvergensi kuadratik, jika $p = 3$, maka metode hampiran memiliki orde konvergensi kubik, dan seterusnya. Apabila notasi $e_n = x_n - \alpha$ merupakan notasi untuk nilai tingkat kesalahan pada iterasi ke-n, pada suatu metode yang menghasilkan suatu barisan $\{x_n\}$, maka suatu persamaan

$$e_{n+1} = Ce_n^p + O(e_n^{p+1}) \tag{2.3}$$

dapat disebut sebagai persamaan tingkat kesalahan, sedangkan nilai p pada persamaan (2.3) menunjukan orde konvergensinya.

Definisi 2.3. Computational Order of Convergence (Weerakoon, 1998). Misalkan α adalah akar dari $f(x)$ dan andaikan x_{n+1}, x_n dan x_{n-1} berturut-turut adalah iterasi yang dekat dengan α. Maka, Computational Order of Convergence (COC) p dapat diaproksimasi dengan menggunakan rumus atau

$$p \approx \frac{\ln|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)|}{\ln|(x_n - \alpha)/(x_{n-1} - \alpha)|} \text{ atau } p \approx \frac{\ln|(e_{n+1})/(e_n)|}{\ln|(e_n)/(e_{n-1})|}$$

Contoh:

1. Diberikan fungsi $f(x) = 3 - 8x + x^3$, dengan menggunakan metode Newton tentukan iterasi untuk menemukan akar tunggal $\alpha = -3$, serta konvergensi fungsi tersebut dengan nilai awal $x_0 = -2.8$ dan toleransi $e = 10^{-14}$.

   Penyelesaian.

Tabel 2.1. Hasil Iterasi dan COC Metode Newton

Iterasi	x_n	e_n	*COC*
0	-2,80000000000000	0,20000000000000	1.99654945681476
1	-3.02216494845360	0.02216494845360	TTd
2	-3.00022903307347	0.00022903307347	TTd
3	-3.00000002484352	0.00000002484352	TTd
4	-3.00000000000000	-0,00000000000000	TTd

TTd : Tidak Terdefinisi

Tabel 2.1 menunjukkan bahwa metode Newton dengan akar tunggal memiliki konvergensi kuadratik dengan $p \approx 2$.

2.3 Deret Taylor

Deret taylor adalah deret yang sering digunakan untuk menghampiri fungsi fungsi yang sangat rumit, hal ini disebabkan oleh bentuknya yang berupa polinomial.

Teorema 1. **Deret Taylor (Munir, 2006)** Andaikan f dan semua turunannya *f', f'', f''' ...,* menerus di dalam selang $[a, b]$. Misalkan $x_0 \epsilon\ [a, b]$ maka untuk nilai-nilai x di sekitar x_0 dan $x\ \epsilon\ [a, b]$, *f(x)* dapat diperluas ke dalam deret taylor;

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots$$

$$+ \frac{(x - x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + R_n(x) \tag{2.4}$$

dengan

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{(n+1)}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\text{c}) \tag{2.5}$$

Persamaan (2.4) disebut bentuk umum Rumus Taylor dan persamaan (2.5) merupakan selisih dari nilai eksak.

Bukti : Berdasarkan teorema Dasar Kalkulus diperoleh bahwa :

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \qquad (2.6)$$

dengan menerapkan integral parsial pada ruas kanan dari persamaan (2.6) maka dapat dimisalkan :

$u \quad = f^{'}(x)$ dan $dv = dx$ sehingga diperoleh $du \ = f"(x)dx$ dan $v = x$

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

$$\int_a^b f^{'}(x)dx = f^{'}(x)(x)|_a^b - \int_a^b (x)f"(x)\,dx$$

$$\int_a^b f^{'}(x)dx = f^{'}(x)(b-a) - \int_a^b (x)f"(x)\,dx \qquad (2.7)$$

Substitusikan persamaan (2.7) ke dalam persamaan (2.6), maka diperoleh

$$f(b) = f(a) + f^{'}(x)(b-a) - \int_a^b (x)f"(x)dx \qquad (2.8)$$

untuk $\int_a^b (b-x)f"(x)dx$, dengan menerapkan kembali pengintegralan parsial maka dapat dimisalkan:

$u \quad = f"(x)$ dan $dv = (-x)dx$, maka diperoleh $du = f^{'''}(x)dx$dan $v = -\frac{(x)^2}{2}$

kemudian diperoleh

$$\int_a^b f"(x)xdx = f"(x)\frac{-(x)^2}{2}|_a^b - \int_a^b -\frac{(x)^2}{2}f^{'''}(x)dx$$

$$= f''(x)\frac{-(b-a)^2}{2!} + \int_a^b \frac{(x)^2}{2} f'''(x)dx \tag{2.9}$$

dengan memasukkan persamaan (2.9) ke persamaan (2.8), diperoleh

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \int_a^b \frac{(x)^2}{2} f'''(x)dx \tag{2.10}$$

jika proses tersebut dilakukan berulang sebanyak n kali, maka akan diperoleh suatu deret yang disebut deret Taylor.

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(b-a)^n$$
$$+R_n(b) \tag{2.11}$$

dengan

$$R_n(b) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx \tag{2.12}$$

Persamaan (2.12) adalah bentuk sisa untuk *f(b).* apabila $g(x) = f^{n+1}(x)$ dan $h(x) = (b-x)^n$ adalah perkalian yang menghasilkan $R_n(b)$ maka bentuk sisa diatas dapat ditulis kembali menjadi

$$R_n(b) = \frac{1}{n!}\int_a^b g(x)h(x)dx$$

Berdasarkan keterangan teorema di atas yang menyatakan bahwa $f^{n+1}(x)$ adalah fungsi yang kontinu, maka akan mengakibatkan fungsi *g(x)* juga kontinu. Andaikan fungsi *h(x)* adalah fungsi yang kontinu pada interval $[a, b]$, maka menurut teorema nilai rata-rata untuk integral terdapat konstanta c dimana c $\in$ $[a, b]$: $(a \leq c \leq b)$ sehingga

$$R_n(b) = \frac{1}{n!}\int_a^b g(x)h(x)dx$$

$$= \frac{g(x)}{n!}\int_a^b h(x)dx$$

$$= \frac{g(c)}{n!} \int_a^b h(x)dx$$

$$= \frac{f^{(n+1)}c}{n!} \int_a^b (b-a)^n dx$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^n}{(n+1)!}$$

dengan mengganti $a = x_0$, $b=x_0+h$, dan $R_n(b) = O(h^{n+1})$, untuk $k=0,1,2,\ldots,n$, maka teorema di atas maka bentuk sisanya dapat ditulis sebagai

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{n+1}(x_0)}{n!}h^{n+1} + \frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{f^m(x_0)}{m!}h^m + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1} \qquad (2.13)$$

maka,

$$f(x_0+h) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^m(x_0)}{m!}h^m + O(h^{n+1}) \qquad (2.14)$$

dengan

$$O(h^{n+1}) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

2.4 Interpolasi Langrange

1. interpolasi linier

Misalkan diberikan dua titik (x_0, y_0) dan (x_1, y_1). Polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah persamaan garis lurus yang berbentuk,

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x) \qquad (2.15)$$

Koefisien a_0 dan a_1 dicari dengan proses mengalihan (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) ke dalam persamaan (2.15), diperoleh dua persamaan linear,

$$y_0 = a_0 + a_1 x_0$$

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1$$

dan dengan mengeleminasi kedua persamaan tersebut, diperoleh

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{2.16}$$

dan

$$a_0 = \frac{y_0 x_1 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \tag{2.17}$$

Subtitusikan persamaan (2.16), dan (2.17) ke dalam persamaan (2.15), maka diperoleh:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x \\ &= \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1 + x y_1 - x y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1 + x y_1 - x y_0 + x_0 y_0 - x_0 y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{(x_1 - x_0) y_0 + (y_1 - y_0)(x - x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} (x - x_0) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Bentuk terakhir dapat diubah menjadi,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_0 \\ &= \frac{y_0(x_1 - x_0) - (x - x_0) y_0}{x_1 - x_0} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \end{aligned}$$

$$= y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \tag{2.19}$$

2. Galat Interpolasi

   Secara umum galat diberikan oleh

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 0}}^{n} (x - x_i)\, f^{(n+1)}(\xi(x))\, dx \tag{2.20}$$

Oleh karena polinomial $P_1(x)$ menggunakan satu sub interval $(n = 1)$, maka galat pada interval $a = x_0$ dan $b = x_1$ adalah

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0 x_1)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi) \left[\frac{x^3}{3} - \frac{(x_0 + x_1)}{2} x^2 + x_0 x_1 x \right]_{x_0}^{x_1}$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi) \left(\frac{x_1^3}{3} - \frac{(x_0 + x_1)}{2} x_1^2 + x_0 x_1^2 \right)$$

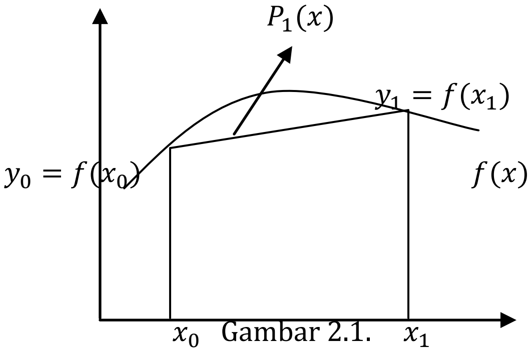
$$- \left(\frac{x_0^3}{3} - \frac{(x_0 + x_1)}{2} x_0^2 + x_1 x_0^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{h^3}{6} f''(\xi) \right)$$

$$= -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \tag{2.21}$$

2.5 Aturan Trapesium

Aturan trapesium merupakan bentuk integrasi kuadratur yang menggunakan interpolasi linear. Misalkan terdapat dua titik $(x_0, f(x_0))$ dan $(x_1, f(x_1))$ dan sebuah garis $y = f(x)$ yang melalui kedua titik tersebut.



Gambar 2.1.

Berdasarkan Gambar 2.1 diperoleh bahwa $f(x)$ pada interval $[x_0, x_1]$ dapat dihampiri oleh $P_1(x)$, sehingga luasan di bawah kurfa $f(x)$ pada interval $[x_0, x_1]$ juga dapat diaproksimasi oleh kurva di bawah polynomial $P_1(x)$.

Oleh karena luasan trapesium dihasilkan dari luasan di bawah polinomial di dalam $P_1(x)$ maka

Oleh karena $I_T(f) = \int_a^b P_1(x)\, dx$ maka

$$I_T(f) = \int_a^b \frac{f(b) - f(a)}{b-a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a} dx \tag{2.23}$$

Hasil integrasi persamaan (2.23) memberikan:

$$I_T(f) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b - a)^2}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}(b-a)$$

bentuk $(b - a)^2 = (b - a)(b - a)$ maka:

$$I_T(f) = [f(b) - f(a)] \frac{(b-a)}{2} + bf(a) - af(b)$$

$$= [f(b) + f(a)] \frac{(b-a)}{2} \tag{2.24}$$

2.6 Metode Newton dan Orde Konvergensinya

Misalkan fungsi f dapat diekspansi di sekitar $x = x_n$ menggunakan deret Tayor dengan x_n pendekatan $f(x) = 0$, jika $f(x)$ diekspansi di sekitar x_n sampai orde pertama, maka diperoleh

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) \tag{2.25}$$

Karena $f(x) = 0$, selanjutnya distribusikan ke persamaan (2.25) dengan mengambil $x = x_{n+1}$ sehingga

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n)$$

$$(x_{n+1} - x_n)f'(x_n) = -f(x_n)$$

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2 \tag{2.26}$$

Persamaan (2.26) merupakan persamaan umum metode Newton yang memerlukan nilai awal x_0 yang akan menghasilkan suatu $\{ x_0 \}$, dan iterasi akan berhenti untuk suatu toleransi yang ditentukan.

Teorema 2. Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai rill yang mempunyai turunan pertama, kedua dan ketiga pada interval (a,b). Jika $f(x)$ mempunyai akar α pada interval (a,b) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang mendekati akar α, maka persamaan (2.26) memiliki orde konvergensi tingkat dua dengan persamaan error $e_n = x_n - \alpha$.

Bukti: Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(x) = 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$. Selanjutnya dengan menggunkan rumus ekspansi Taylor untuk mengaproksimasi fungsi f di sekitar x_n, diperoleh

$$f(x_n) = f(x^* + e_n)$$

$$= f(x^*) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f''(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4) \quad (2.27)$$

Karena $f(\alpha) = 0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.27) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{1}{3!}\frac{f''(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)} + O(e_n^4)\right) \quad (2.28)$$

misalkan $C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$ $k = 1, 2, 3, \ldots$ maka persamaan (2.28) dapat ditulis kembali menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha)\big(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\big) \quad (2.29)$$

Dilakukan cara yang sama untuk mendapatkan hasil $f'(x_n)$ sehingga diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha + e_n)$$

$$= f'(\alpha) + f^{(2)}(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f^{(3)}(\alpha)e_n^2 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left(1 + \frac{f^{(2)}(\alpha)e_n}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f^{(3)}(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + O(e_n^3)\right)$$

$$= f'(\alpha)\big(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\big) \quad (2.30)$$

Selanjutnya dilakukan pembagian persamaan (2.29) oleh persamaan (2.30)

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f(\alpha)\big(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\big)}{f'(\alpha)\big(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\big)}$$

$$= \frac{\big(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\big)}{\big(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\big)} \quad (2.31)$$

oleh karena

$$\frac{1}{1+u} = (1 - u + u^2 - u^3 + \cdots) \quad (2.32)$$

maka persamaan (2.34) dapat dibentuk menjadi

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4) \times (1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3))^{-1}$$

$$= (e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4) \times (1 - (2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3))$$

$$+\left(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)^2 - \cdots)$$

$$= (e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4) \times (1 - (2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3))$$

$$+(4C_2^2 + \cdots))$$

$$= (e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4) \times (1 - 2C_2e_n + (4C_2^2 - 3C_3)e_n^2$$

$$+O(e_n^3))$$

diperoleh,

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - C_2e_n^2 + O(e_n^3) \qquad (2.33)$$

kemudian dengan mensubtitusikan persamaan (2.33) ke persamaan umum Newton akan menghasilkan

$$x_{n+1} = x_n - (e_n - C_2e_n^2 + O(e_n^3))$$

oleh karena $x_n = e_n + \alpha$ maka $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, sehingga diperoleh,

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - (e_n - C_2e_n^2 + O(e_n^3))$$

$$e_{n+1} = C_2e_n^2 + O(e_n^3)$$

2.6 Varian Newton dan Konvergensinya

Pada tahun 1998 S. Weerakoon dan T. G. I. Fernando melakukan penelitian tentang memodifikasi metode newton dengan menggunakan kaidah trapesium. Diberikan metode newton sebagai berikut

$$x_{n+1}^* = x_n^* - \frac{f(x_n^*)}{f'(x_n^*)}$$

bentuk diatas dapat diubah ke model liner lokal.

$$\frac{f(x_n^*)}{f'(x_n^*)} = x_n^* - x_{n+1}^*$$

$$f(x_n^*) = f'(x_n^*)(\, x_n^* - x_{n+1}^*)$$

$$Mn(x) = f(x_n^*) - f'(x_n^*)(\, x_n^* - x_{n+1}^*) \qquad (2.34)$$

Persamaan (2.34) dapat ditafsirkan dengan cara lain, berdasarkan teorema newton

$$f(x) = f(x_n^*) + \int_{x_n^*}^{x} f'(\lambda)d\lambda \qquad (2.35)$$

Persamaan (2.35) bentuk integralnya dapat diaproksimasi dengan bentuk trapesium.

$$\int_{x_n^*}^{x} f'(\lambda)d\lambda \approx \; f'(x_n^*)(\, x - x_n^*) \qquad (2.36)$$

$$\int_{x_n^*}^{x} f'(\lambda)d\lambda \approx \; \frac{1}{2}\,(x - x_n)[f'(x_n) + f'(x)] \qquad (2.37)$$

Sehingga persamaan (2.34) dapat dibentuk menjadi

$$Mn(x) = f(x_n) - \frac{1}{2}\,(x - x_n)[f'(x_n) + f'(x)] \qquad (2.38)$$

Ambil titik iteratif berikutnya sebagai akar dari model lokal

$$Mn(x_{n+1}) = \; 0,$$

$$f(x_n) - \frac{1}{2}\,(x_{n+1} - x_n)[f'(x_n) + f'(x_{n+1})] = 0$$

$$(x_{n+1} - x_n)[f'(x_n) + f'(x_{n+1})] = -2f(x_n)$$

$$(x_{n+1} - x_n) = \frac{-2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(x_{n+1})}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*)} \qquad (2.39)$$

Fungsi diatas adalah fungsi implisit, dengan $x_{n+1}^* \; = \; x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

dengan orde konvergensi

$$e_{n+1} = \left(C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.40)$$

Bukti. Berdasarkan persamaan (2.40), misalkan α adalah akar akar sederhana dari $f(x)$ dengan $f(\alpha) = 0$, dan $f'(\alpha) \neq 0$, dan $x_n = \alpha + e_n$. Untuk itu gunakan deret taylor untuk mengexpansi $f(x_n)$

$$f(x_n) = f(\alpha + e_n)$$

$$= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left[e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)[e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)] \qquad (2.41)$$

dengan $C_j = (1/j!)f^{(j)}(\alpha)/f'(\alpha)$.

Dengan cara yang sama, maka untuk $f'(x_n)$ di dapat

$$f'(x) = f'(\alpha)[1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)] \qquad (2.42)$$

Lakukan pembagian $f(x_n)$ dengan $f'(x_n)$ sehingga

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)[e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)]}{f'(\alpha)[1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)]}$$

$$= f'(\alpha)[e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)]\,[1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)]^{-1} \qquad (2.43)$$

Berdasarkan persamaan (2.32) maka persamaan (2.43) dapat dibentuk menjadi

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4) \times (1 - (2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)) + \left(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)^2 - \cdots)$$

$$= (e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4) \times (1 - (2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)) + (4C_2^2 + \cdots))$$

$$= (e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4) \times (1 - 2C_2e_n + (4C_2^2 - 3C_3)e_n^2 + O(e_n^3))$$

diperoleh,

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - C_2e_n^2 + (2C_2^2 - 2C_3)e_n^3 + O(e_n^4)$$

sehingga

$$x_{n+1}^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= \alpha + e_n - [e_n - C_2 e_n^2 + (2C_n^2 - 2C_3) e_n^3 + O(e_n^4)]$$

$$= \alpha + C_2 e_n^2 + (2C_3 - 2C_2^2) e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.44)$$

persamaan (2.44) di ekspansi dengan deret taylor

$$f'(x_{n+1}^*) = f'(\alpha) + [\, C_2 e_n^2 + (2C_3 - 2C_2^2) e_n^3 + O(e_n^4)] f''(\alpha) + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\{1 + [\, 2C_2 e_n^2 + 4(C_3 - C_2^2) e_n^3 + O(e_n^4)][\frac{f^{(2)}(\alpha)}{2f^{(1)}(\alpha)}]\}$$

$$= f'(\alpha)[1 + 2C_2^2 e_n^2 + 4C_2(C_3 - C_2^2) e_n^3 + O(e_n^4)] \qquad (2.45)$$

Jumlah persamaan (2.42) dan (2.45)

$$f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*) = f'(\alpha)[1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)]$$

$$+ f'(\alpha)[1 + 2C_2^2 e_n^2 + 4C_2(C_3 - C_2^2) e_n^3 + O(e_n^4)]$$

$$= 2f'(\alpha)[1 + C_2 e_n + (C_2^2 + \frac{3}{2} C_3) e_n^2 + O(e_n^3)] \qquad (2.46)$$

Selanjutnya untuk mendapatkan orde konvergensi dari persamaan (2.39) lakukan pembagian pada persamaan (2.41) dengan (2.46)

$$\frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*)} = [e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)]$$

$$[1 + C_2 e_n + (C_2^2 + \frac{3}{2} C_3) e_n^2 + O(e_n^3)]^{-1}$$

$$= [e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)]\{1 - [C_2 e_n + (C_2^2 + \frac{3}{2} C_3) e_n^2 + O(e_n^3)]$$

$$+ [C_2 e_n + (C_2^2 + \frac{3}{2} C_3) e_n^2 + O(e_n^3)]^2 - \cdots\}$$

$$= [e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)] \left[1 - C_2 e_n - \frac{3}{2} C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right]$$

$$= e_n - C_2 e_n^2 - \frac{3}{2} C_3 e_n^3 + C_2 e_n^2 - C_2^2 e_n^3 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= e_n - (C_2^2 + \frac{1}{2} C_3) e_n^3 + O(e_n^4).$$

Kemudian

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*)}$$

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - \left[e_n - \left(C_2^2 + \frac{1}{2} C_3\right) e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$e_{n+1} = \left(C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.47}$$

Dari persamaan (2.47) dapat dilihat bahwa persamaan (2.39) memiliki orde konvergensi tingkat tiga.

2.7 Metode Jarrat dan Orde Konvergensinya

Pandang persamaan metode Jarrat sebagai berikut

$$x_{n+1} = z_n - Jf(z_n)\frac{f(z_n)}{f'(z_n)},$$

dengan

$$Jf(x_n) = \frac{3f'(p_n)\ +\ f'(x_n)}{6f'(p_n)\ -\ 2f'(x_n)},$$

dan

$$p_n =\ z_n - \ \frac{2f(z_n)}{3f'(z_n)},$$

Misalkan f(z) = 0 dan α adalah akar dari fungsi f(z) tersebut, maka f(α) = 0 dan asumsikan bahwa f'(z) = 0. Dengan menggunakan ekspansi taylor untuk $f(z_n)$ di sekitar $z = \alpha$ diperoleh

$$\begin{aligned} f(z_n) &= f(\alpha + e_n) \\ &= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4) \end{aligned} \tag{2.51}$$

Karena f(α) = 0, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.51) diperoleh

$$\begin{aligned} f(z_n) &= f'(\alpha)[e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)} + \frac{O(e_n^4)}{f'(\alpha)} \\ &= f'(\alpha)[e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)] \end{aligned} \tag{2.52}$$

Sedangkan untuk $f'(z_n)$ dapat diperoleh dengan mengekspansinya di sekitar $z = \alpha$ maka

$$\begin{aligned} f'(z_n) &= f'(\alpha)[1 + \frac{f''(\alpha)e_n}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{O(e_n^3)}{f'(\alpha)}] \\ &= f'(\alpha)[1 + \frac{f''(\alpha)e_n}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + O(e_n^3)] \end{aligned}$$

$$= f'(\alpha)[1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)] \qquad (2.53)$$

maka

$$\frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = \frac{f'(\alpha)[e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)]}{f'(\alpha)[1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)]}$$

$$= e_n - C_2 e_n^2 + 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + (7C_2C_3 - 4C_2^3 - 3C_4)e_n^4$$

$$+O(e_n^5)] \qquad (2.54)$$

sehingga

$$p_n = z_n - \frac{2f(z_n)}{3f'(z_n)}$$

$$= \alpha + e_n - \frac{2}{3}(e_n - C_2 e_n^2 + 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + (7C_2C_3 - 4C_2^3 - 3C_4)e_n^4 + O(e_n^5))$$

$$= \alpha + \frac{1}{3}e_n - \frac{2}{3}C_2 e_n^2 + \frac{4}{3}(C_3 - C_2^2)e_n^3 + \frac{2}{3}(4C_2^3 - 7C_2C_3 + 3C_4)e_n^4 + O(e_n^5)$$

Untuk itu,

$$f(p_n) = f'(\alpha)[\tfrac{1}{3}e_n - \tfrac{2}{3}C_2 e_n^2 + \tfrac{4}{3}(C_3 - C_2^2)e_n^3 + \tfrac{2}{3}(4C_2^3 - 7C_2C_3 + 3C_4)e_n^4$$

$$+O(e_n^5)] \qquad (2.55)$$

dan

$$f'(p_n) = f'(\alpha)[1 + \frac{2}{3}C_2 e_n + \frac{1}{3}(C_3 + C_2^2)e_n^2 + (-\frac{8}{3}C_2^3 + 4C_2C_3 + \frac{4}{27}C_4)e_n^3$$

$$+O(e_n^4)]$$

Sedangkan untuk

$$3f'(p_n) + f'(z_n) = 3f'(\alpha)[1 + \frac{2}{3}C_2 e_n + \frac{1}{3}(C_3 + C_2^2)e_n^2 + O(e_n^3)]$$

$$+ f'(\alpha)[1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)]$$

$$= 4 + 4C_2 e_n + 4(C_3 + C_2^2)e_n^2 + 4(\tfrac{10}{9}C_4 - 2C_2^3 + 3C_2C_3)e_n^3$$

$$+O(e_n^4)$$

$$= 4[1 + C_2 e_n + (C_3 + C_2^2)e_n^2 + (\frac{10}{9}C_4 - 2C_2^3 + 3C_2C_3)e_n^3$$

$$+O(e_n^4)] \qquad (2.56)$$

dan untuk

$$6f'(p_n) - 2f'(z_n) = 6f'(\alpha)[1 + \frac{2}{3}C_2 e_n + \frac{1}{3}(C_3 + C_2^2)e_n^2 + O(e_n^3)]$$

$$-2f'(\alpha)[1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)]$$

$$=4+(8C_2^2-4C_3)\,e_n^2+4(6C_2C_3-4C_2^3-\frac{16}{9}C_4)e_n^3$$

$$+\,O(e_n^4)$$

$$=4[1+(2C_2^2-C_3)\,e_n^2+(6C_2C_3-4C_2^3-\frac{16}{9}C_4)$$

$$+O(e_n^4) \qquad (2.57)$$

maka

$$jf(x_n)=\frac{3f'(p_n)\;+\;f'(z_n)}{6f'(p_n)\;-\;2f'(z_n)}$$

$$=\frac{1+C_2e_n+(C_3+C_2^2)e_n^2+(\frac{10}{9}C_4-2C_2^3+3C_2C_3)e_n^3+O(e_n^4)}{1+(2C_2^2-C_3)\,e_n^2+(6C_2C_3-4C_2^3-\frac{16}{9}C_4)e_n^3+O(e_n^4)}$$

misalkan $u=(2C_2^2-C_3)\,e_n^2+(6C_2C_3-4C_2^3-\frac{16}{9}C_4)e_n^3+O(e_n^4)$, maka ekspansi deret $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+\cdots$, sehingga

$$Jf(x_n)=(1-(2C_2^2-C_3)\,e_n^2+(6C_2C_3-4C_2^3-\frac{16}{9}C_4)e_n^3+O(e_n^4)$$

$$+((2C_2^2-C_3)\,e_n^2+(6C_2C_3-4C_2^3-\frac{16}{9}C_4)e_n^3+O(e_n^4))^2-\cdots)$$

$$=1+C_2e_n+(2C_3-C_2^2)e_n^2+(\frac{26}{9}C_4-2C_2C_3)e_n^3$$

$$+\,O(e_n^4) \qquad (2.58)$$

selanjutnya berdasarkan persamaan (2.54) dan (2.58), maka

$$Jf(x_n)\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}=[1+C_2e_n+(2C_3-C_2^2)e_n^2+(\frac{26}{9}C_4-2C_2C_3)e_n^3+O(e_n^4)]$$

$$[e_n-C_2e_n^2+2(C_2^2-C_3)e_n^3+(7C_2C_3-4C_2^3-3C_4)e_n^4+O(e_n^5)]$$

$$=e_n-(C_2^3-C_2C_3+\tfrac{1}{9}C_4)\,e_n^4+\;O(e_n^5)$$

sehingga orde persamaan tersebut adalah

$$x_{n+1}=\alpha+e_n-[e_n-(C_2^3-C_2C_3+\frac{1}{9}C_4)\,e_n^4+\;O(e_n^5)]$$

$$=\alpha+(C_2^3-C_2C_3+\frac{1}{9}C_4)\,e_n^4+\;O(e_n^5)$$

2.8 Rata-rata Kontra Harmonik

Definisi : Rata-rata aritmatik persegi empat dari bilangan pembagi oleh bilangan aritmatik adalah rata-rata kontra hormonik dari himpunan bilangan positif (Http://en.Wikipedia.org/wiki/contraharmonic_mean)

$$C(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\frac{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}{n}}{\frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n}} \tag{2.59}$$

dapat disederhanakan menjadi

$$C(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} \tag{2.60}$$

dengan

$C(x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon [\min(x_1, x_2, \dots, x_n), (\max\ (x_1, x_2, \dots, x_n)]$

$C(p.x_1, p.x_2, \dots, p.x_n) = p.C(x_1, x_2, \dots, x_n)$

dengan p>0.

Diberikan dua variabel a dan b dengan $0 < a \leq b$, hal ini dilakukan untuk memudahkan mengetahui rata-rata kontra harmonik komplemen terhadap rata-rata harmonik. Maka rata-rata kontra harmonik $C(a,b)$ juga berasal dari rata-rata aritmatik sedemikian sehingga;

$$C(a,b) - A(a,b) = A(a,b) - H(a,b), \text{atau}$$

$$C(a,b) = 2A(a,b) - H(a,b) \tag{2.61}$$

Berdasarkan rumus rata-rata aritmatik dan rata-rata harmonik dari dua variabel diperoleh masing-masing

$$A(a,b) = \frac{(a+b)}{2} \tag{2.62}$$

dan

$$H(a,b) = \frac{1}{\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = \frac{2ab}{a+b} \tag{2.63}$$

Kemudian diaproksimasikan menjadi

$$C(a,b) = 2A(a,b) - H(a,b) = (a+b) - \frac{2ab}{a+b}$$

$$= \frac{(a+b)^2 - 2ab}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

sehingga rumus rata-rata kontra harmonik dapat ditulis:

$$c = \frac{a^2+b^2}{a+b} \tag{2.64}$$

2.9 Modifikasi Varian Newton dan Orde Konvergensinya

Varians newton diberikan oleh persamaan (2.42) dengan bentuk $x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n)+f'(x^*_{n+1})}$, akan dimodifikasi dengan rata-rata kontra harmonik dengan bentuk $c = \frac{a^2+b^2}{a+b}$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(x^*_{n+1})}$$

$$= x_n - \frac{f(x_n)}{(f'(x_n) + f'(x^*_{n+1}))/2}$$

bentuk diatas dapat ditulis kembali ke bentuk

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{(f'(x_n) + f'(y_n))/2} \tag{2.65}$$

bentuk diatas akan dimodifikasi dengan rata-rata kontra harmonik $c = \frac{a^2+b^2}{a+b}$, dengan menetapkan $a = f'(x_n)$ dan $b = f'(y_n)$ sehingga persamaan (2.65) menjadi

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)\left(f'(x_n) + f'(y_n)\right)}{f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2} \tag{2.66}$$

dengan

$$y_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Misalkan f(x) = 0 dan α adalah akar dari fungsi f(x) tersebut, maka f(α) = 0 dan asumsikan bahwa $f'(x) \neq 0$. Dengan menggunakan ekspansi taylor untuk $f(x_n)$ di sekitar $x = \alpha$ diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha + e_n)$$

$$= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4)$$

Karena $f(\alpha) = 0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar maka diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)[e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)} + \frac{O(e_n^4)}{f'(\alpha)}]$$

$$= f'(\alpha)[e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)]$$

dengan cara yang sama maka diperoleh,

$$f'(x_n) = f'(\alpha)[1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)] \quad (2.67)$$

selanjutnya

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)[e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)]}{f'(\alpha)[1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)]}$$

sehingga untuk persamaan newton diperoleh

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= \alpha + C_2e_n^2 + (2C_3 - 2C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)$$

berikutnya untuk $f'(y_n)$ diperoleh

$$f'(y_n) = f'(\alpha)[1 + 2C_2^2e_n^2 + 4C_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)] \quad (2.68)$$

selanjutnya

$$f'(x_n)^2 = f'(\alpha)^2[1 + 4C_2e_n + (4C_2^2 + 6C_3)e_n^2 + (8C_4 + 12C_2C_3)e_n^3 + O(e_n^4)] \quad (2.69)$$

dan

$$f'(y_n)^2 = f'(\alpha)^2[1 + 4C_2^2e_n^2 + (8C_2C_3 - 8C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)] \quad (2.70)$$

selanjutnya jumlahkan persamaan (2.67) dan (2.68)

$$f'(x_n) + f'(y_n) = 2f'(\alpha)[1 + 2C_2e_n + (C_2^2 + \frac{2}{3}C_3)e_n^2$$
$$+2(C_2C_3 - C_2^3 + C_4)e_n^3 + O(e_n^4)] \quad (2.71)$$

dan persamaan (70) dan (71)

$$f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2 = 2f'(\alpha)^2[1 + 2C_2e_n + (4C_2^2 + 3C_3)$$
$$e_n^2 + (10C_2C_3 - 4C_2^3 + 4C_4)e_n^3 + O(e_n^4) \quad (2.72)$$

selanjutnya mengalikan $f(x_n)$ dan $f'(x_n) + f'(y_n)$ didapat

$$f(x_n)(f'(x_n) + f'(y_n)) = 2f'(\alpha)^2[e_n + 2C_2e_n^2 + (2C_2^2 + \frac{5}{2}C_3)e_n^3$$
$$+O(e_n^4) \quad (2.73)$$

maka orde konvergensi untuk persamaan (2.66) diperoleh

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)\left(f^{'}(x_n) + f^{'}(y_n)\right)}{f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2}$$

$$= \alpha + e_n$$

$$- \frac{2f^{'}(\alpha)^2[e_n + 2C_2e_n^2 + (2C_2^2 + \frac{5}{2}C_3)e_n^3 + O(e_n^4)]}{2f^{'}(\alpha)^2[1 + 2C_2e_n + (4C_2^2 + 3C_3)e_n^2 + (10C_2C_3 - 4C_2^3 + 4C_4)e_n^3 + O(e_n^4)]}$$

$$= \alpha + e_n - [e_n + 2C_2e_n^2 + (2C_2^2 + \frac{5}{2}C_3)e_n^3 + O(e_n^4)]$$

$$[1 - (2C_2e_n + (4C_2^2 + 3C_3)e_n^2 + (10C_2C_3 - 4C_2^3 + 4C_4)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$+(2C_2e_n + \quad (4C_2^2 + 3C_3)e_n^2 + (10C_2C_3 - 4C_2^3 + 4C_4)e_n^3 + O(e_n^4))^2 - \cdots]$$

$$= \ \alpha + (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4)$$

Dari uraian diatas dapat diketahui persamaan (2.66) memiliki tingkat orde konvergensi tiga.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Skripsi ini hanya membahas secara teori modifikasi dan orde konvergensi dari metode Jarrat. Oleh karena itu, penulis hanya menggunakan metode penelitian kepustakaan yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan selama penelitian, baik yang berasal dari buku-buku, jurnal serta artikel yang berhubungan dengan penelitian.

Adapun langkah langkah dalam menentukan bentuk modifikasi metode jarrat ini adalah sebagai berikut;

1. Menentukan bentuk dari persamaan newton (N) yang berasal dari deret taylor orde pertama yaitu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.1}$$

2. Menentukan bentuk modifikasi metode newton dengan kaedah trapesium sehingga dihasilkan varian baru newton (VN)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*)} \tag{3.2}$$

dengan

$$x_{n+1}^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3. Menentukan bentuk modifikasi dari newton (VN) dengan menggunakan kontra harmonik, sehingga didapat persamaan berikut:

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)\left(f'(x_n) + f'(y_n)\right)}{f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2} \tag{3.3}$$

dengan

$$y_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

4. Menentukan bentuk modifikasi dari metode jarrat pada persamaan (1.1) dengan menggunakan bentuk persamaan (3.3).
5. Menentukan tingkat orde konvergensi dan simulasi numerik dari varian metode jarrat.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Modifikasi Metode Jarrat

Pada persamaan (1.1) diketahui bentuk persamaan jarrat adalah:

$$J_n = z_n - Jf(z_n)\frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \qquad (4.1a)$$

dengan

$$Jf = \frac{3f'(p_n) + f'(z_n)}{6f'(p_n) - 2f'(z_n)}, \qquad (4.1b)$$

dan

$$p_n = z_n - \frac{2f(z_n)}{3f'(z_n)}. \qquad (4.1c)$$

Persamaan tersebut akan dimodifikasi dengan menggunakan varian newton pada persamaan (2.66)

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)\left(f'(x_n) + f'(y_n)\right)}{f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2},$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Untuk itu sebelumnya akan dicari aproksimasi dari $f'(z_n)$ dengan menggunakan interpolasi linier

$$f'(z_n) \approx \frac{(z_n - x_n)}{(y_n - x_n)}f'(y_n) + \frac{(z_n - y_n)}{(x_n - y_n)}f'(x_n). \qquad (4.2)$$

Subtitusikan persamaan (2.66) ke dalam persamaan (4.2) seperti berikut,

$$f'(z_n) \approx \frac{\left(\left(x_n - \frac{f(x_n)\left(f'(x_n) + f'(y_n)\right)}{f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2}\right) - x_n\right)}{\left(\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) - x_n\right)} f'(y_n) +$$

$$\frac{\left(\left(x_n - \frac{f(x_n)\left(f'(x_n)+f'(y_n)\right)}{f'(x_n)^2+f'(y_n)^2}\right) - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)\right)}{\left(x_n - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)\right)} f'(x_n)$$

$$f'(z_n) \approx \frac{\left(-\frac{f(x_n)\left(f'(x_n)+f'(y_n)\right)}{f'(x_n)^2+f'(y_n)^2}\right)}{-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} f'(y_n) +$$

$$\frac{\left(-\frac{f(x_n)\left(f'(x_n)+f'(y_n)\right)}{f'(x_n)^2+f'(y_n)^2} + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} f'(x_n)$$

$$\approx \left(\frac{f(x_n)\left(f'(x_n)+f'(y_n)\right)}{f'(x_n)^2+f'(y_n)^2}\right)\left(\frac{f('x_n)f'(y_n)}{f(x_n)}\right) +$$

$$\left(-\frac{f(x_n)\left(f'(x_n)+f'(y_n)\right)}{f'(x_n)^2+f'(y_n)^2} + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)\left(\frac{f'(x_n)^2}{f(x_n)}\right), \quad (4.3)$$

dengan melakukan proses aljabar pada persamaan (4.3), maka persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$f'(z_n) \approx \frac{2f'(x_n)f'(y_n)^2}{f'(x_n)^2+f'(y_n)^2}. \quad (4.4)$$

Selanjutnya untuk memodifikasi metode Jarrat, akan dicari bentuk modifikasi dari persamaan (4.1c) dengan menyubtitusikan persamaan (4.4) sebagai berikut

$$p_n = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)},$$

$$p_n = z_n - \frac{f(z_n)(f'(x_n)^2+f'(y_n)^2)}{3f'(x_n)f'(y_n)^2},$$

kemudian untuk persamaan (4.1b), subtitusikan persamaan (4.2) sebagai berikut

$$Jf = \frac{3f'(p_n) + f'(z_n)}{6f'(p_n) - 2f'(z_n)},$$

$$= \frac{3f'(p_n) + \left(\frac{2f'(x_n)f'(y_n)^2}{f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2}\right)}{6f'(p_n) - 2\left(\frac{2f'(x_n)f'(y_n)^2}{f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2}\right)},$$

setelah dilakukan proses aljabar, bentuk diatas dapat disederhanakan menjadi

$$Jf = \frac{3f'(p_n)f(x_n)^2 + 3f'(p_n)f'(y_n)^2 + 2f'(x_n)f'(y_n)^2}{2((3f'(p_n)f'(x_n)^2) + 3f'(p_n)f'(y_n)^2 - 2f'(x_n)f'(y_n)^2)}.$$

Kemudian untuk persamaan (4.1a), subtitusikan persamaaan (4.4) sebagai berikut

$$J_n = z_n - Jf\frac{f(z_n)}{f'(z_n)},$$

$$J_n = z_n - Jf\frac{f(z_n)(f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2)}{2f'(x_n)f'(y_n)^2}.$$

Berdasarkan penjabaran diatas, maka diperoleh bentuk varian dari metode Jarrat sebagai berikut,

$$J_n = z_n - Jf\frac{f(z_n)(f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2)}{2f'(x_n)f'(y_n)^2},$$

dengan

$$Jf(z_n) = \frac{3f'(p_n)f(x_n)^2 + 3f'(p_n)f'(y_n)^2 + 2f'(x_n)f'(y_n)^2}{2((3f'(p_n)f'(x_n)^2) + 3f'(p_n)f'(y_n)^2 - 2f'(x_n)f'(y_n)^2)},$$

dan

$$p_n = z_n - \frac{f(z_n)(f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2)}{3f'(x_n)f'(y_n)^2},$$

serta

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)\left(f'(x_n) + f'(y_n)\right)}{f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2},$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4.2 Orde Konvergensi

Misalkan $f(x) = 0$ dan α adalah akar dari fungsi $f(x)$ tersebut, maka $f(\alpha) = 0$ dan asumsikan $f'(x) \neq 0$. Dengan menggunakan ekspansi taylor untuk $f(x_n)$ disekitar $x = \alpha$ diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha + e_n)$$
$$= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (4.5)$$

Karena $f(\alpha) = 0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (4.5) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)[e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)} + \frac{O(e_n^4)}{f'(\alpha)}$$
$$= f'(\alpha)[e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)]. \qquad (4.6)$$

Sedangkan untuk $f'(x_n)$ dapat diperoleh dengan mengekspansinya di sekitar $x = \alpha$ maka

$$f'(x_n) = f'(\alpha)[1 + \frac{f''(\alpha)e_n}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{O(e_n^3)}{f'(\alpha)}]$$
$$= f'(\alpha)[1 + \frac{f''(\alpha)e_n}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + O(e_n^3)]$$
$$= f'(\alpha)[1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)], \qquad (4.7)$$

dan

$$f'(x_n)^2 = f'(\alpha)^2[1 + 4C_2e_n + (4C_2^2 + 6C_3)e_n^2 + (8C_4 + 12C_2C_3)e_n^3 +$$
$$O(e_n^4), \qquad (4.8)$$

maka

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)[e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)]}{f'(\alpha)[1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)]}$$
$$= e_n - C_2e_n^2 + 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + O(e_n^4), \qquad (4.9)$$

sehingga

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$= \alpha + e_n - (e_n - C_2e_n^2 + 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + O(e_n^4)$$
$$= \alpha + C_2e_n^2 + 2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (4.10)$$

Oleh karena

$$y_n = \alpha + C_2e_n^2 + 2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4),$$

maka

$$f'(y_n) = f'(\alpha)[1 + 2C_2e_n^2 + 4C_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)], \qquad (4.11)$$

dan

$$f'(y_n)^2 = f'(\alpha)^2[1 + 4C_2^2 e_n^2 + (8C_2C_3 - 8C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)], \qquad (4.12)$$

selanjutnya jumlahkan persamaan (4.7) dan persamaan (4.11) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x_n) + f'(y_n) &= f'(\alpha)[1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)] \\ &\quad + f'(\alpha)[1 + 2C_2e_n^2 + 4C_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)] \\ &= 2f'(\alpha)[1 + 2C_2e_n + (C_2^2 + \frac{3}{2}C_3)e_n^2 + 2(C_2C_3 - C_2^3 + C_4)e_n^3 + O(e_n^4)], \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f(x_n)(f'(x_n) + f'(y_n)) &= (f'(\alpha)[e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)])(2f'(\alpha)[1 + \\ &\quad 2C_2e_n + (C_2^2 + \tfrac{3}{2}C_3)e_n^2 + 2(C_2C_3 - C_2^3 + C_4)e_n^3 + \\ &\quad O(e_n^4)]) \\ &= 2(f'(\alpha)^2[e_n + 2C_2e_n^2 + (2C_2^2 + \frac{5}{2}C_3)e_n^3 \\ &\quad + O(e_n^4)]). \qquad (4.13) \end{aligned}$$

Kemudian jumlahkan persamaan (4.8) dan persamaan (4.12) sehingga

$$\begin{aligned} f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2 &= f'(\alpha)^2[1 + 4C_2e_n + (4C_2^2 + 6C_3)e_n^2 + (8C_4 + 12C_2C_3)e_n^3 \\ &\quad + O(e_n^4) + f'(\alpha)^2[1 + 4C_2^2e_n^2 + (8C_2C_3 - 8C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)] \\ &= 2f'(\alpha)^2[1 + 2C_2e_n + (4C_2^2 + 3C_3)e_n^2 + (10C_2C_3 - 4C_2^3)e_n^3 \\ &\quad + O(e_n^4)]. \qquad (4.14) \end{aligned}$$

maka subtitusikan persamaan (4.12) dan (4.13) untuk orde konvergensi dari z_n

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)\left(f'(x_n) + f'(y_n)\right)}{f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2}$$

$$= \frac{2(f'(\alpha)^2[e_n + 2C_2e_n^2 + (2C_2^2 + \frac{5}{2}C_3)e_n^3 + O(e_n^4)]}{2f'(\alpha)^2[1 + 2C_2e_n + (4C_2^2 + 3C_3)e_n^2 + (10C_2C_3 - 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)]}$$

$$= \frac{[e_n + 2C_2e_n^2 + (2C_2^2 + \frac{5}{2}C_3)e_n^3 + O(e_n^4)]}{[1 + 2C_2e_n + (4C_2^2 + 3C_3)e_n^2 + (10C_2C_3 - 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)]}$$

$$\begin{aligned} &= [e_n + 2C_2e_n^2 + (2C_2^2 + \frac{5}{2}C_3)e_n^3 + O(e_n^4)]\{1 - [2C_2e_n + (4C_2^2 + 3C_3)e_n^2 + (10 \\ &\quad C_2C_3 - 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)] - [2C_2e_n + (4C_2^2 + 3C_3)e_n^2 + (10C_2C_3 - 4C_2^3)e_n^3 \\ &\quad + O(e_n^4)]^2 - \cdots\} \end{aligned}$$

$$= [e_n - (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4)]$$

$$z_n = e_n + \alpha - [e_n - (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4)] = [\alpha + (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4)].$$

Kemudian untuk

$$p_n = z_n - \frac{f(z_n)(f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2)}{2f'(x_n)f'(y_n)^2},$$

untuk mempermudah proses aljabar bentuk diatas diubah kebentuk semula menjadi

$$p_n = z_n - \frac{2f(z_n)}{3f'(z_n)},$$

lalu untuk $f'(z_n)$ sebagai berikut

$$f'(z_n) \approx \frac{2f'(x_n)f'(y_n)^2}{f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2}$$

$$f'(z_n) \approx \frac{2(f'(\alpha)\ (1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3))((f'(\alpha)(1 + 2C_2^2e_n^2 + 4C_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4))^2}{2f'(\alpha)^2[1 + 2C_2e_n + (4C_2^2 + 3C_3)e_n^2 + (10C_2C_3 - 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)]}$$

$$f'(z_n) \approx \frac{((1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3))(1 + 2C_2^2e_n^2 + 4C_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4))^2}{[1 + 2C_2e_n + (4C_2^2 + 3C_3)e_n^2 + (10C_2C_3 - 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)]},$$

dengan melakukan proses aljabar diperoleh

$$f'(z_n) \approx f'(\alpha)[1 + (2C_2(-C_3 + 6C_2^2))e_n^3 + O(e_n^4)].$$

Setelah $f'(z_n)$ didapat barulah dapat dicari orde konvergensi dari varian Jarrat secara kseluruhan sebagai berikut

$$p_n = z_n - \frac{2f(z_n)}{3f'(z_n)}$$

$$= [\alpha + (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4)] - \frac{2f(\alpha + (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4))}{3f'(\alpha)[1 + (2C_2(-C_3 + 6C_2^2))e_n^3 + O(e_n^4)]}$$

$$= [\alpha + (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4)]$$

$$- \frac{2(f(\alpha) + f'(\alpha)((2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4)) + f'(\alpha)((2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4))^2 \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)})}{3f'(\alpha)[1 + (2C_2(-C_3 + 6C_2^2))e_n^3 + O(e_n^4)]}$$

$$= [\alpha + (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4)]$$

$$-\frac{2(f'(\alpha)(((2C_2^2+\frac{C_3}{2})e_n^3+O(e_n^4))+((2C_2^2+\frac{C_3}{2})^2e_n^6+O(e_n^7)))\mathrm{C}_2}{3f'(\alpha)[1+(2\mathrm{C}_2(-\mathrm{C}_3+6\mathrm{C}_2^2))\mathrm{e}_\mathrm{n}^3+\mathrm{O}(\mathrm{e}_\mathrm{n}^4)]}$$

$$=[\alpha+(2C_2^2+\frac{C_3}{2})e_n^3+O(e_n^4)]$$

$$-\frac{2(((2C_2^2+\frac{C_3}{2})e_n^3+O(e_n^4))+((2C_2^2+\frac{C_3}{2})^2e_n^6+O(e_n^7))\mathrm{C}_2}{3[1+(2\mathrm{C}_2(-\mathrm{C}_3+6\mathrm{C}_2^2))\mathrm{e}_\mathrm{n}^3+\mathrm{O}(\mathrm{e}_\mathrm{n}^4)]}$$

$$p_n=\alpha+(-10C_2^2-\frac{5}{2}C_3)e_n^3+O(e_n^4).$$

Kemudian dicari $f'(p_n)$ sebagai berikut

$$f'(p_n)=f'(\alpha)\{1+(-10C_2^2-\frac{5}{2}C_3)e_n^3+O(e_n^4)\frac{f^2(\alpha)}{f^1(\alpha)}\}$$

$$=f'(\alpha)(1+2C_2(-10C_2^2-\frac{5}{2}C_3)e_n^3+O(e_n^4)).$$

Lalu untuk persamaan $jf(z_n)$ subtitusikan $f'(p_n)$ dan $f'(z_n)$ sebagai berikut

$$jf(z_n)=\frac{3f'(p_n)+f'(z_n)}{6f'(p_n)-2f'(z_n)}$$

$$jf(z_n)$$
$$=\frac{3(f'(\alpha)[1+2C_2(-10C_2^2-\frac{5}{2}C_3)e_n^3+O(e_n^4)]+f'(\alpha)[1+(2\mathrm{C}_2(-\mathrm{C}_3+6\mathrm{C}_2^2))\mathrm{e}_\mathrm{n}^3+\mathrm{O}(\mathrm{e}_\mathrm{n}^4)]}{6(f'(\alpha)[1+2C_2(-10C_2^2-\frac{5}{2}C_3)e_n^3+O(e_n^4)]-2f'(\alpha)[1+(2\mathrm{C}_2(-\mathrm{C}_3+6\mathrm{C}_2^2))\mathrm{e}_\mathrm{n}^3+\mathrm{O}(\mathrm{e}_\mathrm{n}^4)]}$$

$$jf(z_n)$$
$$=\frac{3(f'(\alpha)\{[1+2C_2(-10C_2^2-\frac{5}{2}C_3)e_n^3+O(e_n^4)]+[1+(2\mathrm{C}_2(-\mathrm{C}_3+6\mathrm{C}_2^2))\mathrm{e}_\mathrm{n}^3+\mathrm{O}(\mathrm{e}_\mathrm{n}^4)]\}}{6(f'(\alpha)[(1+2C_2(-10C_2^2-\frac{5}{2}C_3)e_n^3+O(e_n^4)]-2[1+(2\mathrm{C}_2(-\mathrm{C}_3+6\mathrm{C}_2^2))\mathrm{e}_\mathrm{n}^3+\mathrm{O}(\mathrm{e}_\mathrm{n}^4)]\}}$$

$$jf(z_n)=\frac{3\{[1+2C_2(-10C_2^2-\frac{5}{2}C_3)e_n^3+O(e_n^4)]+[1+(2\mathrm{C}_2(-\mathrm{C}_3+6\mathrm{C}_2^2))\mathrm{e}_\mathrm{n}^3+\mathrm{O}(\mathrm{e}_\mathrm{n}^4)]\}}{6\{(1+2C_2(-10C_2^2-\frac{5}{2}C_3)e_n^3+O(e_n^4))-2[1+(2\mathrm{C}_2(-\mathrm{C}_3+6\mathrm{C}_2^2))\mathrm{e}_\mathrm{n}^3+\mathrm{O}(\mathrm{e}_\mathrm{n}^4)]\}}$$

$$jf(z_n)=\frac{1+\frac{1}{4}(-48C_2^3-17C_2C_3)e_n^3+O(e_n^4)}{1+\frac{1}{4}(-144C_2^3-26C_2C_3)e_n^3+O(e_n^4)}$$

$$jf(z_n)=[1+\frac{1}{4}(-48C_2^3-17C_2C_3)e_n^3+O(e_n^4)][1-(\frac{1}{4}(-144C_2^3-26C_2C_3)e_n^3+O(e_n^4)]$$

$$jf(z_n)=1+(24C_2^3+\frac{9}{4}C_2C_3)e_n^3+O(e_n^4).$$

Sehingga untuk orde konvergensi dari varian Jarrat didapat dengan menyubtitusikan $jf(z_n)$ dan $f'(z_n)$ ke persamaan J_n sebagai berikut,

$$J_n = z_n - jf(z_n)\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

$$= \alpha + (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$-(1 + (24C_2^3 + \frac{9}{4}C_2C_3)e_n^3 + O(e_n^4))\frac{f(\alpha + (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4))}{f'(\alpha)[1 + (2C_2(-C_3 + 6C_2^2))e_n^3 + O(e_n^4)]}$$

$$= \alpha + (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4) - (1 + (24C_2^3 + \frac{9}{4}C_2C_3)e_n^3 + O(e_n^4))$$

$$\frac{f'(\alpha)(2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4) + \frac{f''(\alpha)}{2}(2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4))}{f'(\alpha)[1 + (2C_2(-C_3 + 6C_2^2))e_n^3 + O(e_n^4)]}$$

$$= \alpha + (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4) - (1 + (24C_2^3 + \frac{9}{4}C_2C_3)e_n^3 + O(e_n^4))$$

$$\frac{f'(\alpha)[(2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4) + C_2(2C_2^2 + \frac{C_3}{2})^2e_n^6 + O(e_n^7)]}{f'(\alpha)[1 + (2C_2(-C_3 + 6C_2^2))e_n^3 + O(e_n^4)]}$$

$$= \alpha + (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4) - \{(1 + (24C_2^3 + \frac{9}{4}C_2C_3)e_n^3 + O(e_n^4))$$

$$\frac{[(2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4) + C_2(2C_2^2 + \frac{C_3}{2})^2e_n^6 + O(e_n^7)]}{[1 + (2C_2(-C_3 + 6C_2^2))e_n^3 + O(e_n^4)]}\}$$

$$= \alpha + (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4) - \{(1 + (24C_2^3 + \frac{9}{4}C_2C_3)e_n^3 + O(e_n^4))$$

$$[(2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4) + C_2(2C_2^2 + \frac{C_3}{2})^2e_n^6 + O(e_n^7)][1 - [(2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3$$

$$+O(e_n^4) + (C_2(2C_2^2 + \frac{C_3}{2})^2e_n^6 + O(e_n^4))^2]]\}$$

$$= \alpha + (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4) - (1 + (24C_2^3 + \frac{9}{4}C_2C_3)e_n^3 + O(e_n^4))(2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3$$

$$+O(e_n^4))$$

$$= \alpha + (2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4) - [(2C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 + O(e_n^4) + (24C_2^3 + \frac{9}{4}C_2C_3)(2C_2^2$$

$$+\frac{1}{2}C_3)e_n^6 + O(e_n^7)$$

$$J_n = \alpha - (24C_2^3 + \frac{9}{4}C_2C_3)(2C_2^2 + \frac{1}{2}C_3)e_n^6 + O(e_n^7).$$

Karena $J_n = e_{n+1} + \alpha$ maka diperoleh orde konvergensi varian Jarrat adalah

$$e_{n+1} = -(24C_2^3 + \frac{9}{4}C_2C_3)(2C_2^2 + \frac{1}{2}C_3)e_n^6 + O(e_n^7).$$

Dari uraian diatas dapat diketahui bahwa varian jarrat memiliki orde konvegensi tingkat enam.

4.3 Simulasi Numerik

Pada sub bab ini, akan dilakukan simulasi numerik yang bertujuan untuk menguji keefektivan varian motede Jarrat orde enam. Untuk itu dilakukan perbandingan antar metode iterasi lainya dengan menggunakan aplikasi pemograman MATLAB versi 7.0.4. dengan digit error e = 10^{-16} dan batas toleransi maksimal n = 150 iterasi. Dalam perbandingan ini, fungsi yang digunakan yaitu :

1. $x^3 + 4x^2 - 10$ $\alpha = 1.3652300134140968$
2. $x^2 - e^x - 3x + 2$ $\alpha = 0.2575302854398608$
3. $xe^{x^2} - sin^2x + 3cosx + 5$ $\alpha = -1.2076478271309189$
4. $(x-1)^3 - 2$ $\alpha = 2.2599210498948732$
5. $(x+2)e^x - 1$ $\alpha = -0.4428544010023886$

Berdasarkan hasil perhitungan komputasi atau simulasi numerik diperoleh jumlah iterasi dari berbagai metode seperti: N dinotasikan sebagai metode Newton dengan orde kovergensi ke-dua, VN dinotasikan sebagai varian metode Newton (weerakoon, 1998) dengan orde konvergensi ke-tiga, J dinotasikan sebagai metode Jarrat dengan orde konvergensi ke-empat, MKS dinotasikan sebagai metode varian Newton orde konvergensi ke-enam (Manoj Khumar Sign, 2009), VJ dinotasikan sebagai varian metode Jarrat dengan orde konvergensi ke-enam, berikut ini adalah tabel perbandingan jumlah iterasi dari metode tersebut.

Tabel.4.1. Perbandingan jumlah iterasi dan COC

F	x_0	i					COC				
		N	VN	J	MKS	VJ	N	VN	J	MKS	VJ
1	0.5	7	5	3	5	5	2.00	3.01	TTd	3.06	3.07
	2	5	4	3	4	4	1.99	TTd	TTd	2.99	2.98
2	-3	6	4	3	4	3	2.00	1.02	TTd	2.96	TTd
	-0.5	4	3	3	3	3	1.98	TTd	TTd	TTd	TTd
3	2.7	13	DIV	17	DIV	DIV	1.99	TTd	4.12	TTd	TTd
	-3.6	18	12	8	14	14	1.99	2.96	4.09	2.96	2.94
4	-2	15	DIV	9	DIV	14	1.99	TTd	3.78	TTd	2.98
	3	6	4	3	4	4	1.99	0.86	TTd	2.93	2.91
5	-2.4	25	DIV	8	DIV	DIV	1.99	TTd	3.96	TTd	TTd
	3.6	10	7	6	7	9	1.29	2.98	3.90	2.86	3.01

DIV : Divergen

TTd : Tidak Terdefinisikan

Secara umum Tabel 4.1 menjelaskan jumlah iterasi dan Computational Order of Convergence (COC) dari masing-masing metode, juga dapat dilihat bahwa COC dari VJ adalah tiga.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Metode Newton (N) memiliki orde konvergensi tingkat dua dan dimodifikasi dengan menggunakan aturan Trapesium (VN), sehingga menghasikan orde konvergensi kubik. Berdasarkan hasil modifikasi metode Newton dengan rata-rata kontra harmonik (VNk) didapatkan suatu persamaan baru dengan bentuk:

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)\left(f^{'}(x_n) + f^{'}(y_n)\right)}{f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2},$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

selanjutnya metode Newton (VNk) memodifikasi metode Jarrat (J) yang memiliki tingkat orde konvergensi empat, sehingga didapatkan suatu persamaan baru dengan bentuk

$$J_n = z_n - jf(z_n)\frac{f(z_n)(f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2)}{2f'(x_n)f'(y_n)^2}$$

dengan

$$Jf(z_n) = \frac{3f'(p_n)f(x_n)^2 + 3f'(p_n)f'(y_n)^2 + 2f'(x_n)f'(y_n)^2}{2((3f'(p_n)f'(x_n)^2) + 3f'(p_n)f'(y_n)^2 - 2f'(x_n)f'(y_n)^2)}$$

$$p_n = z_n - \frac{f(z_n)(f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2)}{2f'(x_n)f'(y_n)^2}$$

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)\left(f^{'}(x_n) + f^{'}(y_n)\right)}{f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2}$$

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, diketahui bahwa tingkat konvergensi yang dihasilkan dari modifikasi metode Jarrat dengan varian metode Newton (VNk) adalah orde ke enam dengan bentuk persamaan error sebagai berikut

$$e_{n+1} = (24C_2^3 + \frac{9}{4}C_2C_3)(2C_2^2 + \frac{1}{2}C_3)e_n^6 + O(e_n^7)$$

Secara teori, modifikasi metode Jarrat dengan varian metode Newton (VJ) seharusnya lebih cepat mencapai konvergen dibanding dengan varian metode Jarrat lainya yang memiliki tingkat orde konvergensi dibawah enam

5.2 Saran

Skripsi ini diilhami dari proses yang dilakukan oleh Singh (2009) dengan memodifikasi metode Newton dengan rata-rata kontra harmonik menghasilkan tingkat konvergensi ke-enam. Oleh karena itu, penulis menyarankan bagi pembaca agar meneliti lebih lanjut dengan melibatkan metode-metode lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Changbum, C. *Some improvement of Jarratt's method with sixth*-order *convergence, Applied Mathematics and Computation.* Vol. 190, halaman 1432-1437, 2007

Mathews, John H., *Numerical Methods for Mathematics Science and Engineering, Second Edition,* Prentice-Hall International,Inc, United States of America.1992

Munir, R. *Metode Numerik, revisi kedua*, Informatika, Bandung, 2003

Purcell, E.j., Varberg. D., Steven E.R. *Kalkulus Edisi Kedelapan. Jilid 2,* Erlangga, Jakarta. 2004

Singh, K.M. *a six-order Variant of Newton's Method for Solving Nonlinear Equation,* Computational Methods in Science and Technology 15(2), 185-193 (2009)

Wartono *Pengantar Metode Numerik, Jilid 1,* Jurusan Matematika Sains dan Teknologi UIN Suska Riau, Pekanbaru, 2009

Weerakon, S. & Fernando, T.G.I.. *A variant of Newton's Method With Accelerated Third-Order Convergence.* Applied Mathematics Letters. 13:87-93, 2000

Http://en.Wikipedia.org/wiki/contraharmonic_mean, diakses 10 Desember 2010